

Dev n° 19

Réf: Julien Bernis, Laurent Bernis
 "Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements"
 p 138 - 144
 + Ravère p 171 - 172

Titre: Théorèmes du point fixe compact

Notre but:

Thm:Soient $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n. $K \subset E$ compact et $f: K \rightarrow K$ continue.① S.g $\forall x, y \in K$ avec $x \neq y$,

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad (1)$$

Alors, f admet un unique point fixe $\alpha \in K$. (Bernis)② De plus, $\forall x_0 \in K$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ et $u_0 = x_0$, converge vers α . (Rav)③ S.g K étoilé et $\forall (x, y) \in K^2$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Alors, f admet un point fixe. (Bernis)Démo:① Posons $g: K \rightarrow \mathbb{R}^+$; $x \mapsto \|f(x) - x\|$.* Existence:Cette application est continue par composée de fonction continue.
 ($\|\cdot\|$ continue car l.i.p.)Donc, continue sur K , donc $\exists \alpha$ t.q. $g(\alpha) = \min_{x \in K} g(x)$ car K compact.*Par l'absurde s.g. α n'est pas un point fixe.

On a par (1):

$$g(f(\alpha)) = \|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\| = g(\alpha) \quad \Downarrow \quad \alpha \text{ min.}$$

Donc, α est un point fixe de f .* Unicité:S.g. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ deux points fixe de f .

Alors,

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\| = \|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)\| < \|\alpha_1 - \alpha_2\| \quad \Downarrow$$

Le point fixe est donc unique.

② Soit $x_0 \in K$.

$$\forall n, \|u_{n+1} - \alpha\| = \|f(u_n) - \alpha\| < \|u_n - \alpha\|$$

Donc $(\|u_n - \alpha\|)_n$ est $\searrow$ positive donc a une limite l . X compact donc $\exists i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strict $\searrow$ t.q. $(u_{i(n)})_n$ a une limite x
 donc $\|u_{i(n)} - \alpha\| \rightarrow \|x - \alpha\|$

$$\|f(u_{i(n)}) - \alpha\| = \|u_{i(n)+1} - \alpha\| \quad f \text{ continue.}$$

$$\downarrow$$

 $d(f(x), \alpha)$

$$\downarrow$$

 l

$$\downarrow$$

$$d(b(x), \alpha)$$

• Thm Banach-Picard:

(E, d) e.m. complet. f k -contractante.

Alors, f admet un unique pt fixe.

De plus $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f(u_n) = u_{n+1}$ cv vers le pt fixe.

Démo:

• Unicité: si $a = f(a)$ et $b = f(b)$

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq k d(a, b) \stackrel{k < 1}{\Rightarrow} d(a, b) \leq 0.$$

• Existence: $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1 \end{cases}$

On va étudier cette suite.

$$\text{Pour } n \geq 1, d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1}).$$

$$\text{Par récurrence: } d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x, x_0).$$

$$\text{Si } p, q, d(x_p, x_q) \leq \sum_{j=p}^{q-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq d(x, x_0) \sum_{j=p}^{q-1} k^j.$$

$$\leq d(x, x_0) \frac{k^p}{1-k} \quad k \in [0; 1[$$

$$\text{Donc, diam}(\{x_n \mid n \geq p\}) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x, x_0) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

Donc, (x_n) est de Cauchy dans (E, d) complet.

Donc, elle cv. Soit $p = \lim_n x_n$

Il q c'est un pt fixe:

$$\forall n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ p & = & f(p) \end{array} \quad \text{car continue}$$

□

Thm:

 $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n., $K \subset E$ compact et $f: K \rightarrow K$ continue.① S.g. $\forall x, y \in K$ on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. (1)Alors, f admet un unique pt fixe $\alpha \in K$.② De plus, $\forall x_0 \in K$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = x_0$ converge vers α .③ S.g. K étoilé et $\forall (x, y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.Alors, f admet un pt fixe.

Dém:

① Posons $g: K \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|f(x) - x\|$.

• Existence:

 g continue par compo. de fct co.Donc, continue sur K compact $\Rightarrow \exists \alpha$ min de g .Par l'absurde s.g. α n'est pas un pt fixe.

On a par (1):

$$g(f(\alpha)) = \|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| \leq \|f(\alpha) - \alpha\| = g(\alpha) \quad \downarrow \alpha \text{ min.}$$

 α pt fixe de f

• Unicité:

Soit $\alpha_1 \neq \alpha_2$ pt fixe de f .

Alors,

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\| = \|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)\| \leq \|\alpha_1 - \alpha_2\| \quad \downarrow$$

pt fixe unique

② Soit $x_0 \in K$.

$$\forall n, \|u_{n+1} - \alpha\| = \|f(u_n) - \alpha\| \leq \|u_n - \alpha\|.$$

Donc, $(\|u_n - \alpha\|)_{n \in \mathbb{N}}$ positive donc a une limite l . K compact donc $\exists l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extractrice t.q. $(u_{l(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ aune limite α . Donc $\|u_{l(n)} - \alpha\| \rightarrow \|u_{l(n)} - \alpha\|$.

De plus,

$$\underbrace{\|f(u_{l(n)}) - \alpha\|}_{n \rightarrow +\infty} = \underbrace{\|u_{l(n)} - \alpha\|}_{n \rightarrow +\infty} = \|u - \alpha\|$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|u - \alpha\| &= \|f(u) - \alpha\| \\ &= \|f(u) - f(\alpha)\| \Rightarrow u = \alpha. \end{aligned}$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence.Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers α par compacité.③ Posons $z \in K$ t.q. K étoilé p/r à z . $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n: K \rightarrow K$, $x \mapsto z + (1 - \frac{1}{n})(x - z)$ et $f_n = h_n \circ f$.Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x_1, x_2) \in K^2$ t.q. $x_1 \neq x_2$ on a:

$$\|f_n(x_1) - f_n(x_2)\| \leq (1 - \frac{1}{n})\|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|.$$

Donc, $\exists$ pt fixe de f_n noté $\alpha_n \in K$.De cette suite on extrait $(\alpha_{l(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui cv vers α .

On a:

$$\begin{aligned} 0 &= \|f_{l(n)}(\alpha_{l(n)}) - \alpha_{l(n)}\| = \|(h_{l(n)} \circ f)(\alpha_{l(n)}) - \alpha_{l(n)}\| \\ &= \|z + (1 - \frac{1}{l(n)})(f(\alpha_{l(n)}) - z) - \alpha_{l(n)}\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f(\alpha) - \alpha\| = 0 \end{aligned}$$

Donc, $f(\alpha) = \alpha$ □